MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE L'INSERTION PROFESSIONNELLE (**DGESIP**)

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours A2GP session 2017

Composition : Mathématiques 6 (statistiques, probabilités)

Durée : 2 Heures

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1:

Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ; 95 fois sur cent l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne était en état d'ébriété, et 95 fois sur cent l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1) On fait un test sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que la personne soit en état d'ébriété ?

2) On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en fait en état d'ébriété ?

3) Déterminer la probabilité que le résultat donné par l'appareil soit faux.

Exercice 2:

On considère la fonction F définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \exp(-\exp(-x))$.

1) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable X à densité. On précisera alors une densité de la variable X .

2) On considère la variable aléatoire $Y = \exp(-X)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

b) En déduire que la variable aléatoire Y suit une loi usuelle dont on précisera le ou les paramètres.

c) Quelle est l'espérance et la variance de Y ?

Exercice 3 :

Soit U une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .

1) Donner la loi de U^2+1.

2) Calculer $P\left(2U<U^2+1\right)$.

3) Calculer $P(U \text{ est pair})$.

4) Soit V une variable aléatoire sur le même espace probabilisé, indépendante de U , prenant les valeurs 1 et 2 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Calculer $P(UV \text{ est pair})$.

Exercice 4 :

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur les entiers de 1 à n $(n \geq 2)$ et soit Y une loi de Bernoulli de paramètre p $(0<p<1)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

On rappelle que pour $N \geq 1$, $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

2) On pose $U = XY$. Donner la loi de U.

3) Calculer l'espérance et la variance de U.

4) On pose également $V = X + Y$, calculer l'espérance et la variance de V.

5) Calculer la probabilité $P(V=n)$.

6) Calculer les probabilités $P\left[(U=0)\cap(V=n)\right]$ et $P\left[(U=1)\cap(V=n)\right]$.

Les variables aléatoires U et V sont elles indépendantes ? Justifier.

7) Exprimer la covariance de U et V en fonction de $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

Corrigé Maths 6 – 2017 :

EXERCICE 1 :

Soient les évènements E : « Etat d'ébriété » et T : « Test positif ».

On a : $P(E)=0,02$; $P(T/E)=0,95$ et $P(\overline{T}/\overline{E})=0,95$.

1) $P(E/T)=\dfrac{P(E\cap T)}{P(T)}=\dfrac{P(E).P(T/E)}{P(E).P(T/E)+P(\overline{E}).P(T/\overline{E})}=0,279.$

2) $P(E/\overline{T})=\dfrac{P(E\cap \overline{T})}{P(\overline{T})}=\dfrac{P(E).P(\overline{T}/E)}{P(E).P(\overline{T}/E)+P(\overline{E}).P(\overline{T}/\overline{E})}=0,001.$

3) Soit l'évènement F : « le résultat est faux ».

$$P(F)=P(T/\overline{E})+P(\overline{T}/E)=\left(1-P(\overline{T}/\overline{E})\right)+\left(1-P(T/E)\right)=0,05+0,05=0,10.$$

EXERCICE 2 :

1) F est positive , dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}\exp(x)=0 \;;\; \lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to 0}\exp(-x)=1.$$

De plus F est croissante sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x)=(-\exp(-x))'.\exp(-\exp(-x))=\exp(-x).\exp(-\exp(-x))=\exp(-x-\exp(-x))(>0).$$

Ainsi F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire continue X de densité $f=F'$.

2) $Y=\exp(-X)$. Alors son référentiel est $R_Y=\left]0;+\infty\right[$.

a) $\forall y\leq 0$, $G(y)=P(Y\leq y)=0$.

$$\forall y>0 \text{ , } G(y)=P(Y\leq y)=P(\exp(-X)\leq y)=P(X\geq -\ln(y))=1-P(X<-\ln(y))$$

$$G(y)=1-F(-\ln(y))=1-\exp(-y).$$

b) $\forall y>0, G(y)=1-\exp(-y)$. D'où Y suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$.

c) Par définition , on a : $E(Y)=\dfrac{1}{\lambda}=1$ et $V(Y)=\dfrac{1}{\lambda^2}=1$.

EXERCICE 3 :

U suit la loi de Poisson de paramètre λ.

1) <u>Loi de U^2+1:</u> On a $P(U^2+1=k)=P(U=n)$ si $n^2+1=k\in\mathbb{N}^*$.

D'où $P(U^2+1=k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}, \text{ si } k=n^2+1 \; (n\in\mathbb{N})\\ 0 \text{ , sinon}\end{cases}$

2) $P\left(2U < U^2+1\right) = P\left(U^2-2U+1>0\right) = P\left(\left(U-1\right)^2>0\right) = 1-P\left(\left(U-1\right)^2=0\right) = 1-P\left(U=1\right) = 1-\lambda e^{-\lambda}$.

3) $P\left(U \text{ pair}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\left(U=2k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} ch\left(\lambda\right)$.

4) _$P\left(UV \text{ pair}\right) = \frac{1}{2} P\left(U \text{ pair}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(3+e^{-2\lambda}\right)$.

EXERCICE 4 :

1) X suit la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$ $(n \geq 2)$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} k P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

2) Soit Y , variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli de paramètre p, indépendante de X.

On a : $U = XY$. Comme Y est à valeurs dans $\{0,1\}$, alors $U(\Omega) = \{0,1,2,\dots,n\}$.

$P(U=0) = P(Y=0) = q = 1-p$.

Et pour $1 \leq k \leq n$, $P(U=k) = P(X=k; Y=1) = P(X=k)P(Y=1) = \frac{p}{n}$.

3) $E(U) = E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{p(n+1)}{2}$ (X , Y indépendantes).

$E\left(U^2\right) = E\left(X^2Y^2\right) = E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right) = pE\left(X^2\right)$ $\left(Y^2 = Y\right)$.

$$V(U) = E\left(U^2\right) - E(U)^2 = pE\left(X^2\right) - p^2 E(X)^2 = \frac{p(n+1)\left[(4-3p)n + \left(2p-3p^2\right)\right]}{12}.$$

4) $V = X+Y$. Par linéarité, on a : $E(V) = E(X) + E(Y) = \frac{n+1}{2} + p$.

Par indépendance, on a : $Var(V) = Var(X) + Var(Y) = \frac{n^2-1}{12} + p(1-p)$.

5) $(V=n)=(X=n;Y=0)\cup(X=n-1;Y=0)$. L'union étant disjointe, par indépendance on a :

$$P(V=n)=P(X=n)P(Y=0)+P(X=n-1)P(Y=1)=\frac{1}{n}(1-p)+\frac{1}{n}p=\frac{1}{n}.$$

6)

- $(U=0;V=n)=(Y=0;X+Y=n)=(Y=0;X=n)$. D'où

  $P(U=0;V=n)=P(Y=0)P(X=n)=\frac{1-p}{n}$. (indépendance de X et Y)

- $(U=1;V=n)=(XY=1;X+Y=n)=(X=1;Y=0;X=n)=\begin{cases}\varnothing \text{ , si } n\geq 3\\ (X=1;Y=1)\text{, si } n=2\end{cases}$. D'où

$$P(U=1;V=n)=\begin{cases}0 \text{ , si } n\geq 3\\ \frac{p}{n}\text{, si } n=2\end{cases}.$$

Pour $n\geq 3$, $P(U=1)P(V=n)=\frac{p}{n}\neq P(U=1;V=n)$. D'où U et V ne sont pas indépendantes .

7) $\text{Cov}(U,V)=\text{Cov}(XY,X+Y)=E[XY(X+Y)]-E(XY)E(X+Y)$

$$=E(X^2)E(Y)+E(X)E(Y^2)-E(X)E(Y)[E(X)+E(Y)] \text{ (indépendance et linéarité)}$$

$$=\left[E(X^2)-E(X)^2\right]E(Y)+E(X)\left[E(Y^2)-E(Y)^2\right]$$

$\text{Cov}(U,V)=\text{Var}(X)E(Y)+E(X)\text{Var}(Y)$.